SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

E. LANCONELLI

"SOLUZIONI IN R^n DI EQUAZIONI DI POISSON SEMILINEARI"

13 DICEMBRE 1984

Sunto. Si presenta un metodo variazionale che consente di provare l'esistenza di soluzioni classiche non banali dell'equazione di Poisson semilineare

$$(*) \qquad \Delta u + f(u) = 0 \quad \text{in } R^n \quad , \quad n \geq 2,$$

dove $f: R \to R$ è una funzione continua e dispari.

I risultati che si espongono sono dovuti a Strauss ([S]), Coleman-Glazer-Martin ([C-G-M]), Berestycki-Lions ([B-L]) e a Berestycki-Gallouet-Kavian([B-G-K]).

Nel seguito si indicherà sempre con F la funzione

$$F : R \to R \quad , \quad F(t) = \int_0^t f(\sigma)d\sigma \; .$$

1. CONDIZIONI NECESSARIE PER L'ESISTENZA DI SOLUZIONI CLASSICHE NON BANALI DI (*)

1.A.(Identità di Pohozaev).Sia $u \in C^{(2)}(R^n)$ una soluzione di (*) tale che

$$(1.1) \qquad u \in H^1(R^n) \quad , \quad F(u) \in L^1(R^n).$$

Se indichiamo con S_R la sfera di R^n di centro 0 e raggio $R > 0$, e con ν la normale esterna a ∂S_R, risulta (Du = gradiente di u):

$$(1.2) \qquad \begin{aligned} &(n-2)\int_{S_R} |Du|^2\, dx - 2n \int_{S_R} F(u)dx = \\ &= -R\left(\int_{\partial S_R} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 d\sigma + 2\int_{\partial S_R} F(u)\, d\sigma\right) \end{aligned}$$

Questa identità si ottiene moltiplicando (*) per $\sum_{i=1}^{n} x_i \partial_i u(x)$ e integrando, successivamente, su S_R.

Integrando per parti il primo integrale al primo membro di (1.2) e tenendo conto ancora della (*), si ricava

$$(1.3) \qquad \begin{aligned} &\int_{S_R} ((n-2)uf(u) - 2n\, F(u))\, dx = \\ &= -R\left(\int_{\partial S_R} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 dx + 2\int_{\partial S_R} F(u)\, d\sigma\right) - \int_{\partial S_R} u\,\frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma \end{aligned}$$

Ora, in forza della (1.1), riesce

$$\int_{R^n} (|Du|^2 + |F(u)|)dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_{\partial S_R} (|Du|^2 + |F(u)|)d\sigma\right)dR < +\infty;$$

esiste quindi una successione $R_k \to +\infty$ tale che

$$\lim_{k\to+\infty} R_K \int_{\partial S_{R_k}} (|Du|^2 + |F(u)|)d\sigma = 0$$

Dalle (1.2) e (1.3) si ricava allora:

(1.4) $$(n-2)\int_{R^n} |Du|^2 dx = 2n \int_{R^n} F(u)dx \ ,$$

(1.5) $$\lim_{k\to+\infty} \int_{S_{R_k}} ((n-2)u\, f(u) - 2n\, F(u))\, dx = 0 \ .$$

In definitiva:

a) se $u \not\equiv 0$ è una soluzione (classica) di (*) verificante (1.1) allora

(1.6) $$\exists \xi > 0 : F(\xi) > 0.$$

L'affermazione discenda dalla (1.4) nel caso di $n \geqq 3$ e dalla (1.2) nel caso di $n = 2$;

b) se

(1.7) $$(n-2)t\, f(t) - 2n\, F(t) > 0 \ , \quad \text{per } t \neq 0,$$

allora (*) non ha soluzioni classiche non banali verificanti (1.1).

Ciò segue immediatamente dalla (1.5).

Esempio. Il problema

(1.8) $$\begin{cases} \Delta u - u + |u|^{p-1} u = 0 \quad \text{in } R^n \ , \ n \geqq 3, \\ u \in C^2 \ , \ 0 < u(x) \to 0 \quad \text{per } |x| \to +\infty \end{cases}$$

non ha soluzione se $p \geq \frac{n+2}{n-2}$.

Infatti, se u è soluzione di (1.8), risulta $u(x)$, $|Du(x)| = (e^{-m|x|})$ per $|x| \to +\infty$ e per ogni $m \in]0,1[$ (Cfr. ad esempio [L]). In particolare allora $u \in H^1(R^n)$ e $F(u) \in L^1(R^n)$. Qui $f(t) = -t + |t|^{p-1}t$ e, quindi, $F(t) = -\frac{t^2}{2} + \frac{|t|^{p-1}}{p+1}$. Poiché riesce

$$(n-2)tf(t) - 2nF(t) = 2t^2 + |t|^{p+1} ((n-2) - \frac{2n}{p+1}),$$

se $p \geq \frac{n+2}{n-2}$ vale la (1.7) ed allora (1.8) non ha soluzione.

1.B. Se $f \in C^{(2)}$ e se $f'(o) > 0$, l'equazione (*) non ha soluzioni classiche u tali che $u(x) = 0(\frac{1}{|x|})$ per $|x| \to +\infty$, $u \in L^2(\mathbf{R}^n)$.

Infatti, sia $f'(o) = m > 0$ e sia $u \in C^2(R^n)$ verificante (*) e tale che $u(x) = o(\frac{1}{|x|})$ per $|x| \to +\infty$ e $u \in L^2(R^n)$. Allora

(1.9) $$(-\Delta + q(x))u = mu$$

dove $q(x) = (m - \frac{f(u)}{u}) = 0(\frac{1}{|x|})$ per $|x| \to +\infty$.

Ma, per un risultato di Kato ([K], pag. 404), non esistono $u \in C^{(2)}(R^n) \cap L^2(R^n)$ verificanti (1.9) con $m > 0$ e $q(x) = 0(\frac{1}{|x|})$ per $|x| \to +\infty$.

2. ESISTENZA DI SOLUZIONI CLASSICHE DI (*)

In questo paragrafo, utilizzando un metodo di minimizzazione vincolata, mostreremo il Teorema seguente.

Teorema 2.1. Supponiamo:

(H.1) $f: R \to R$, continua e dispari;

(H.2) $\exists \xi > 0: F(\xi) > 0$;

(H.3) $f(t) = -t + f_1(t)$ con $f_1(t) = o(t)$ per $t \to 0$,

$f_1(t) = o(t^l)$ per $t \to +\infty$, $l = \frac{n+2}{n-2}$ se $n \geq 3$, $l \in R^+$ se $n \geq 2$.

Allora il problema

$$\Delta u + f(u) = 0 \text{ in } R^n$$

(2.1)

$$u \in C^2(R^n),\ 0 < u(x) \to 0 \text{ pm} |x| \to +\infty,\ u \not\equiv 0$$

ha almeno una soluzione.

Nota 2.2. Le tecniche che useremo nel seguito si adattano, senza difficoltà, al caso in cui, in luogo di (H.3), vale

(H.3') (a) $-\infty < \underline{\lim}_{t \to 0} \frac{f(t)}{t} \leq \overline{\lim}_{t \to 0} \frac{f(t)}{t} \leq -m < 0$

(b) $\overline{\lim}_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{t^l} \leq 0$

(Cfr. [B-L]). Nel caso di $n = 2$ l'ipotesi (b) può essere ulteriormente indebolita. Basta infatti supporre

(H.3') (b') $f(t) = O(e^{\alpha t^2})$ per $t \to +\infty$, $\alpha > 0$.

(Cfr. [B-G-K]).

Osservazione 2.3. Se $u \in H'(R^n)$ allora $F(u) \in L'(R^n)$. Infatti, per le ipotesi (H.1) e (H.3) riesce

$$|F(u)| \leq C(|u|^2 + |u|^{l+1}) \in L_1(R^n)$$

in quanto, per il Teorema di Sobolev, $H'(R^n) \hookrightarrow L^{l+1}(R^n)$. Si verifica inoltre, senza difficoltà, che il funzionale

$$(2.2) \qquad V: H'(R^n) \to R, \qquad V(u) = \int_{R^n} F(u)\, dx$$

è differenziabile secondo Fréchet in ogni punto, che è di classe $C^{(1)}$ e che

$$dV(u)(h) = \int_{R^n} f(u)\, h\, dx, \forall h \in H'(R^n).$$

E' inoltre immediato che anche il funzionale

$$(2.3) \qquad T: H'(R^n) \to R, \ T(u) = \frac{1}{2} \int_{R^n} |Du|^2\, dx,$$

è di classe C' e che

$$dT(u)(h) = \int_{R^n} Du \,.\, Dh\, dx \quad , \ \forall h \in H^1.$$

Ma allora $u \in H'(R^n)$ è soluzione debole di

$$(2.4) \qquad \Delta u + f(u) = 0$$

se, e solo, se u è un punto critico del funzionale

$$(2.5) \qquad S = T - V$$

Ora, nella ricerca di punti critici di S si incontrano due ordini di difficoltà:

i) S non è limitato, tanto inferiormente quanto superiormente

ii) S non ha proprietà di compattezza di tipo Palais-Smale, a causa, essenzialmente, del fatto che la immersione di $H'(R^n)$ in $L_p(R^n)$ $(1 \leq p < \frac{2n}{n-2})$ non è compatta.

D'altra parte, nel caso particolare di $f(u) = -u + u^3$ e di $n = 3$, Coffman ([C]) ha provato l'esistenza di una sola $u \in H^1(R^n)$ (unica a meno di una traslazione sulle variabili $x \in R^3$) che minimizza il funzionale

$$I(u) = \int_{R^3} \left(\left(\frac{|Du|}{2}\right)^2 + \frac{u^2}{2} \right) dx$$

sotto il vincolo

$$M = \{u \in H'(R^n) \ ; \ 1 = \int_{R^3} \frac{u^4}{4} \, dx \equiv \int_{R^3} (F(u) - \frac{u^2}{2}) dx\}$$

Per il Teorema di Lyusternik sugli estremi condizionati, esistono allora $u \in M$ e $\lambda \in R$ tali che

$$d\,J(u) = \lambda d(\{v \to \frac{1}{4} \int_{R^3} v^4 \, dx\})\Big|_{v = u}$$

In altri termini, u è soluzione debole non banale dell'equazione $\Delta u - u + \lambda u^3 = 0$. La funzione $v = \lambda^{-1/3} u$ diventa allora soluzione debole non banale dell'equazione $\Delta v - v + v^3 = 0$ in R^3.

L'estensione del metodo degli estremi vincolati a situazioni via via più generali di quella considerata da Coffman si deve a Strauss ([S]), Coleman-Glazer-Martin ([C-G-M]) e a Berestycki-Lions ([B-L]). Tali estensioni si fondano sul seguente corollario del Teorema di Lyusternik sugli estremi vincolati.

Teorema 2.4. Sia X uno spazio di Banach reale e siano $T, V \in C^{(1)}(X, R)$ tali che $T(0) = V(0) = 0$.

Supponiamo inoltre

i) T è sequenzialmente debolmente inferiormente semicontinuo, $T \geqq 0$, $dT(u) \neq 0$ se $u \neq 0$, $T(tu) \leqq T(u)$ per $0 \leqq t \leqq 1$.

ii) $M = \{u \in X;\ V(u) = 1\}$ è una varietà regolare di X;

iii) esiste una successione (u_p) in M tale che

$$T(u_p) \to \inf T/M\ ,\quad u_p \underset{X}{\overset{deb}{\to}} u\ ,\quad V(u) \geqq 1$$

Allora esistono $v \in M$ e $\lambda > 0$ tali che $dT(v) = \lambda dV(v)$.

Dimostrazione. Siano (u_p) e u dati da iii).

Allora $T(u) \leqq \inf T/M$ e $V(u) \geqq 1$. Poiché l'applicazione $[0,1] \ni t \to V(tu) \in R$ è continua, vale 0 per $t = 0$ ed è $\geqq 1$ per $t = 1$, esiste $\sigma \in [0,1]$: $V(\sigma u) = 1$. Allora $\sigma u \in M$ e, quindi, $T(\sigma u) \leqq \inf T/M$. In definitiva $v = \sigma u$ è un punto di minimo di T/M e, per il Teorema di Lyusternik, esiste $\lambda \in R$ tale che $dT(v) = d\lambda\, V(v)$.

Poiché $v \in M$ e $0 \notin M$, deve essere $\lambda \neq 0$. Proviamo che $\lambda > 0$. Supponiamo, per assurdo, $\lambda < 0$. Sia $h \in X$: $dV(v)(h) > 0$ ($dV(v) \neq 0$ perché M è una varietà regolare di X). Per $0 < t < 1$, si ha:

$$T(v+th) = T(v) + t(dT(v)(h)+O(1)) = T(v) + \lambda t(dV(v)h + O(1))$$

e, quindi, poiché $\lambda < 0$, $T(v + th) < T(v)$ per $0 < t < \bar{t}$ e per un opportuno $\bar{t}$. Analogamente

$$V(v + th) = V(v) + t(dV(v)(h) + O(1)) > V(v) = 1 \text{ per } 0 < t < \bar{\bar{t}} \text{ e per un}$$

opportuno $\bar{\bar{t}}$.

Esiste allora $\delta \in [0,1]$ tale che $V(\delta(v + th)) = 1$ e $T(\delta(v + th)) \leq T(v + th) < T(v) = \inf T/M$. Ciò è assurdo perché $\delta(v + th)$ M.

Dimostrazione del Teorema 2.1. Nel caso $n \geq 3$ applichiamo il Teorema precedente con $X = H'(R^n)$ e con V e T dati da (2.1) e da (2.2). La verifica di i) e di ii) è immediata, con la sola eccezione della prova che M è $\neq \emptyset$. A questo scopo si usa l'ipotesi (H.2).

Verifichiamo la iii). Sia (v_p) una successione in M tale che $\lim_{p\to+\infty} T(v_p) = \inf T/M = I$. Se (u_p) indica la simmetrizzata radiale di v_p, allora $0 \leq u_p \in H^1(R^n)$, $V(u_p) = V(v_p)$ e $T(u_p) \leq T(v_p)$. In particolare (u_p) è ancora una successione minimizzante di T/M.

Se $n \geq 3$ (u_p) è limitata in $H^1(R^n)$. Infatti, per l'ipotesi (H.3), se $F_1(t) = \int_0^t f_1(s)ds$, si ha

$$\int_{R^n} \frac{1}{2} u_p^2 p d_x = \int_{R^n} F_1(u_p)dx - V(u_p) \leq$$

$$\leq \int_{R^n} (\frac{1}{4} u_p^2 + C|u|^{l+1})dx - 1 \leq \text{(per la disuguaglianza di Poincaré-Sobolev)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{4} \int_{R^n} u_p^2 dx + C_1 \|Du\|_{L_2}^{l+1} \quad ;$$

quindi

$$\int_{R^n} u_p^2\, dx \leq 4\, C_1 (2\, T(u_p))^{\frac{1+1}{2}} .$$

Ciò prova la limitatezza di (u_p) in L_2 e, quindi, in H^1. D'altra parte, se $n = 2$, posto

$$u^*_p(x) = u_p(\delta_p x) \quad , \quad \delta_p = (\|u_p\|_{L_2})^{-1},$$

si ottiene $T(u^*_p) = T(u_p)$ e $\|u^*_p\|_{L_2} = 1$.

In questo caso basta allora sostituire (u_p) con (u^*_p) per ottenere una successione minimizzante limitata in H^1.

Ora, poiché (u_p) è limitata in H^1, eventualmente passando ad una sottosuccessione possiamo supporre $u_p \xrightarrow[H^1]{deb} u$, $u_p \to u$ q.d..

Verifichiamo che $V(u) \geq 1$(*). Richiamiamo anzitutto i seguenti Lemmi ([S] , pag. 155-156).

<u>Lemma</u> (comportamento asintotico delle funzioni radiali di H').

Se $u \in H^1$ è radialmente simmetrica, allora

$$|u(x)| \leq C\, \|u\|_{H^1}\, |x|^{-(n-1)/2} \quad , \quad x \in R^n,\ |x| \geq R_0$$

(C ed R_0 indipendenti da u).

(*) Se $n = 2$, il procedimento si modifica così: $M = \{u \in H^1 : u \neq 0,\ V(u)=0\}$. Si dovrà allora provare che $V(u) \geq 0$.

<u>Lemma</u> (compattezza). Siano P e Q $\in C(R, R)$ tali che $P(s)/Q(s) \to 0$ per $s \to +\infty$ e per $s \to 0$. Sia (u_p) una successione di funzioni misurabili in R^n tale che

$$\sup_p \int_{R^n} |Q(u_p)|dx < +\infty \text{ , } P(u_p) \to v \text{ q.d.,}$$

$u_p(x) \to 0$ per $|x| \to \infty$, uniformemente in p.

Allora $P(u_p) \to v$ in $L_1(R^n)$.

Poiché, grazie all'ipotesi (H.3),

$$-\frac{F_1(s)}{s^2 + |s|^{l+1}} \to 0 \text{ per } s \to 0 \text{ e per } s \to +\infty$$

e poiché, per la disuguaglianza di Sobolev

$$\sup_p \int_{R^n} (u^2_p + |u_p|^{l+1})\, dx \leq C \sup_p \|u_p\|_{H^1} < +\infty \text{ ,}$$

in virtù dei due Lemmi precedenti, riesce

$$\lim_{p \to +\infty} \int_{R^n} F_1(u_p)dx = \int_{R^n} F_1(u)dx$$

Pertanto:

$$V(u) = -\frac{1}{2}\int_{R^n} u^2 dx + \int_{R^n} F_1(u)dx \geq -\lim_{p\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\int_{R^n} u_p^2 dx + \int_{R^n} F_1(u_p)dx\right)$$

$$= \lim_{p\to+\infty} V(u_p) = 1.$$

Sono quindi verificate le ipotesi del Teorema 2.4. Esistono allora $\lambda > 0$ e $v \in M$: $dT(v) = \lambda dV(v)$.

Osserviamo inoltre che $v \geq 0$ e $v \not\equiv 0$ $(v \in M)$. La funzione $u(x) = v\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ è quindi soluzione debole non banale e non negativa di (*).

Mostriamo infine come si prova la regoalrità $C^{(2)}$ di u. Posto $q = \frac{f(u)}{u}$ riesce $q \in L^{n/2} + L^{\infty}$ e $\Delta u + q(x)u = 0$. Allora, per un risultato di Bêzis-Kato [B-K], $u \in L^p_{loc}(R^n)$ $\forall p \in [1, +\infty[$ e, quindi, anche $f(u) \in L^p_{loc}(\mathbf{R}^n)$ $\forall p \in [1, +\infty[$.

Ne segue che $u \in W^{2,p}_{loc}(R^n)$ per ogni $p \in [1, +\infty[$ e quindi $u \in C^{1,\alpha}(R^n)$ $\forall \alpha \in [0,1[$.

La regolarità $C^{(2)}$ di u segue ora dal fatto che, posto $u(x) = \psi(|u|)$, risulta $\psi'' + \frac{n-1}{2}\psi' + f(\psi) = 0$.

Osservazione 2.5. Soluzioni positive dell'equazione di Poisson semilineare in R^n, si possono trovare anche seguendo un metodo duale rispetto a quello utilizzato in precedenza. Precisamente si possono trovare soluzioni di (*) studiando il problema

$$\text{(2.6)} \qquad \max_N V \quad , \quad N = \{u \in H'(R^n);\ T(u) = 1\}$$

La varietà N è il bordo della sfera unitaria di $\mathcal{H}$ = chiusura di $C_0^{\infty}(R^n)$ rispetto alla norma $\|Du\|_{L_2(R^n)}$.

Utilizzando la teoria dei punti critici fondata sul princi-

pio di minimax, adattando opportunamente alcune tecniche sviluppate da Rabinowitz in [R] Berestycki e Lions [B-L] hanno provato che il funzionale V ha infiniti punti critici su

$$N_r = \{u \in N \ / \ u \text{ radialm. simm.}\};$$

di qui essi hanno successivamente dedotto l'esistenza di infinite soluzioni (non necessariamente ≥ 0) dell'equazione (*), generalizzando precedenti risultati di [C], [S], ecc.

Osservazione 2.6.. Le tecniche presentate nelle righe precedenti non sono applicabili ad equazioni non autonome del tipo seguente

$$(2.7) \qquad \Delta u + f(x,u) = 0,$$

né alle equazioni ellittiche semilineari a coefficienti variabili come la seguente

$$(2.8) \qquad \sum_{i,j} \partial_i (A_{ij}(x)\ \partial_j u) + f(u) = 0$$

Il problema di determinare soluzioni su tutto R^n per equazioni generali del tipo (2.7) e (2.8), per quanto ci risulta, è ancora aperto.

Concludiamo indicando un esempio di applicazione del Teorema 2.1.

Esempio 2.7. Consideriamo il problema

$$(2.9) \quad \begin{cases} \Delta u - u + \lambda |u|^{p-1} u - \mu |u|^{q-1} u = 0 \quad \text{in} \quad R^n \\ \\ u \in C^2, \ 0 \leqq u(x) \to 0 \quad \text{per} \ |u| \to +\infty, \ u \neq 0 \end{cases} ,$$

$p,q > 1$, λ e $\mu > 0$, $n \geqq 3$. In questo caso sono soddisfatte le ipotesi del Teorema 2.1 se $1 < q < p < \frac{n+2}{n-2}$.

Se $q \leqq \frac{n+2}{n-2} \leqq p$ vale la (1.7) ed allora (2.9) non ha soluzione (ricordiamo che ogni soluzione di (1.9) è esponenzialmente decrescente al l'infinito).

Se $p < q$ allora (2.9) ha soluzione se, e solo se, λ e μ sono tali che valga (1.6).

Infine, se $\frac{n+2}{n-1} < p < q$, Ni e Serrin hanno provato che (2.9) non ha soluzione ([N-S]).

BIBLIOGRAFIA

[B-L] H. Berestycki, P.L. Lions, Nonlinear Scalar Fied Equations, I, II, Arch. Rat. Mech. and Anal. 82 (1983).

[B-G-K] H. Berestycki, T. Gallonet, O. Kavian, On the equation $\Delta u = g(u)$ in R^2, CRAS 297 (1983).

[B-K] H. Bezis-T. Kato, Remanks on the Schrödinger operator with singular complex potential, J. Math. Pures Appl. 58 (1979).

[C] C.V. Coffman, Uniqueness of the ground state solution for $\Delta u - u + u^3 = 0$ and a variational characterization of other solutions, Arch. Rat. Mech. Anal. 46 (1972).

[C-G-M] S. Coleman, V. Glazer, A. Martin, Action minima among solutions of a class of Euclidean scalar Field equations. Comm. Math. Phys. 58 (1978).

[K] T. Kato, Growth properties of solutions of the reduced wave equation with a variable coefficient, Comm. Pure Applied Math. 12 (1959).

[L] E. Lanconelli, Seminario di Analisi Matematica dell'Istituto Matematico di Bologna, 1982-83.

[N-S] W.M.Ni, J. Serrin, Non existence Theorems for quasilinear partial differential equations (in corso di stampa).

[R] P. Rabinowitz, Variational methods for nonlinear eigenvalue problem, In Eigenvalues of Non-Linear problems, CIME, Ed. Cremonese, Roma (1974).

[S] W.A. Strauss, Existence of solitary waves in higher dimensions, Comm. Math. Phys. 55 (1977).